Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2020/2021

Exame para notas superiores a 15 valores

22 de Janeiro de 2021

Cursos: LMAC, MEFT

[1,0 val] 1. (a) Determine o desenvolvimento em série de Fourier de senos de $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 0 & \text{se} \quad \pi/2 < x \leq \pi \end{cases}$$

e indique, justificando, a soma da série para cada $x \in \mathbb{R}$.

[1,5 val] (b) Use o método de separação de variáveis para resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < \pi \quad , \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x,0) = 0 \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = f(x) & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Resolução:

(a) Para obter um desenvolvimento de Fourier em série de senos, prolonga-se f ao intervalo $[-\pi, 0[$ de forma ímpar e obtém-se assim a sua série de Fourier,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

em que $L = \pi$ e os coeficientes b_n são dados por

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(nx) dx = -\frac{2}{\pi n}\cos(nx)\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{2}{\pi n}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1\right]. \end{aligned}$$

Assim a série de Fourier de senos de f é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n}\left[1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] \operatorname{sen}(nx).$$

Como o prolongamento ímpar de f, em $[-\pi, \pi]$, é seccionalmente C^1, com descontinuidades em $x = 0$ e $x = \pm\pi/2$, o teorema da convergência pontual das séries de

Fourier garante que a correspondente série de senos converge, em cada $x \in [-\pi, \pi]$, para

$$\begin{cases} 0 & \text{se} \quad -\pi \le x < -\pi/2 \\ -1/2 & \text{se} \quad x = -\pi/2 \\ -1 & \text{se} \quad -\pi/2 < x < 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ 1 & \text{se} \quad 0 < x < \pi/2 \\ 1/2 & \text{se} \quad x = \pi/2 \\ 0 & \text{se} \quad \pi/2 < x \le \pi \end{cases}$$

Nos restantes pontos de $x \in \mathbb{R}$ a série converge para o prolongamento periódico, de período 2π, desta função.

(b) Observamos que a equação diferencial parcial dada, assim como as condições de fronteira, são homogéneas. É válido, por isso, o princípio da sobreposição, ou seja, funções obtidas por combinações lineares arbitrárias de soluções da equação e das condições de fronteira ainda as satisfazem.

Vamos por isso usar o método de separação de variáveis, construindo soluções gerais por combinação linear (eventualmente infinita) de soluções mais simples, da forma $u(t,x) = T(t)X(x)$, para $0 \le x \le \pi$ e $t \ge 0$. Substituindo na equação diferencial parcial obtemos

$$T''(t)X(x) - 2T(t)X(x) = T(t)X''(x) \Leftrightarrow \frac{T''(t)}{T(t)} - 2 = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Esta igualdade só é possivel se as funções dos dois lados da igualdade, de variáveis independentes x e t, forem ambas iguais a uma constante, digamos λ. Portanto é equivalente ao seguinte sistema de EDOs, onde λ é um número real qualquer

$$\begin{cases} T''(t) = (\lambda + 2)T(t) \\ X''(x) = \lambda X(x). \end{cases}$$

Começamos pelo problema de valores e funções próprias da segunda derivada, correspondente à equação para X. A expressão para as suas soluções depende do sinal de λ. Temos $X''(x) = \lambda X(x) \Leftrightarrow X''(x) - \lambda X(x) = 0 \Leftrightarrow (D^2 - \lambda)X(x) = 0$, donde

$$X(x) = \begin{cases} Be^{\sqrt{\lambda}x} + Ce^{-\sqrt{\lambda}x} & \text{se } \lambda > 0 \\ Bx + C & \text{se } \lambda = 0 \\ B\cos\sqrt{-\lambda}x + C\,\mathrm{sen}\,\sqrt{-\lambda}x & \text{se } \lambda < 0. \end{cases}$$

onde B, C são constantes reais.

As condições de fronteira homogéneas $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$ para as soluções da forma $T(t)X(x)$ não nulas dizem que

$$T(t)X(0) = T(t)X(\pi) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X(0) = 0 \\ X(\pi) = 0 \end{cases}$$

Impondo estas condições às soluções $X(x)$ determinadas acima temos

(i) Para $\lambda > 0$:

$$\begin{cases} B + C = 0 \\ Be^{\sqrt{\lambda}\pi} + Ce^{-\sqrt{\lambda}\pi} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$

(ii) Para $\lambda = 0$:

$$\begin{cases} C = 0 \\ B\pi + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$

(iii) Para $\lambda < 0$:

$$\begin{cases} B = 0 \\ B\cos(\sqrt{-\lambda}\pi) + C\,\mathrm{sen}(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \text{ ou } \sqrt{-\lambda}\pi = n\pi \end{cases}$$

donde obtemos as soluções não nulas $X(x) = C\,\mathrm{sen}\,(nx)$ com $n = 1, 2, \cdots$, para $\lambda = -n^2$.

Para resolver a equação $T''(t) - (\lambda + 2)T(t) = 0 \Leftrightarrow T''(t) + (n^2 - 2)T(t) = 0 \Leftrightarrow (D^2 + (n^2 - 2))T(t) = 0$ há que observar que, para $n = 1$ a solução desta EDO de segunda ordem tem duas soluções exponenciais linearmente independentes, e para $n \geq 2$ as soluções são trigonométricas. Assim para $n = 1$, a equação é $T''(t) - T(t) = 0$ cuja solução geral é

$$T(t) = a_1 e^t + b_1 e^{-t},$$

enquanto para $n \geq 2$ a solução é

$$T(t) = a_n \cos(\sqrt{n^2 - 2}\ t) + b_n\,\mathrm{sen}(\sqrt{n^2 - 2}\ t).$$

As soluções não triviais da equação diferencial da forma $T(t)X(x)$ que satisfazem as condições de fronteira são portanto as funções da forma

$$a_1 e^t\,\mathrm{sen}(x) + b_1 e^{-t}\,\mathrm{sen}(x),$$

para $n = 1$, e

$$a_n \cos(\sqrt{n^2 - 2}\ t)\,\mathrm{sen}(nx) + b_n\,\mathrm{sen}(\sqrt{n^2 - 2}\ t)\,\mathrm{sen}(nx),$$

para $n \geq 2$.

Procuramos agora uma solução formal para a equação e condição inicial que seja uma "combinação linear infinita" destas soluções obtidas acima:

$$u(x,t) = a_1 e^t\,\mathrm{sen}(x) + b_1 e^{-t}\,\mathrm{sen}(x) + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cos(\sqrt{n^2 - 2}\ t)\,\mathrm{sen}(nx) + b_n\,\mathrm{sen}(\sqrt{n^2 - 2}\ t)\,\mathrm{sen}(nx).$$

Substituindo esta expressão na condição inicial $u(x, 0) = 0$ obtemos

$$(a_1 + b_1)\,\mathrm{sen}(x) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n\,\mathrm{sen}(nx) = 0,$$

e como os coeficientes de Fourier da função nula são nulos, concluímos que

$$a_1 + b_1 = 0 \Leftrightarrow a_1 = -b_1,$$

e

$$a_n = 0, \qquad \text{para} \quad n \geq 2.$$

Por outro lado, derivando a série da solução em ordem a t

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = a_1 e^t \operatorname{sen}(x) - b_1 e^{-t} \operatorname{sen}(x) +$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty} -\sqrt{n^2-2}\; a_n \operatorname{sen}(\sqrt{n^2-2}\; t) \operatorname{sen}(nx) + \sqrt{n^2-2}\; b_n \cos(\sqrt{n^2-2}\; t) \operatorname{sen}(nx),$$

e substituindo na condição inicial para a derivada $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = f(x)$ obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = (a_1 - b_1) \operatorname{sen}(x) + + \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{n^2-2}\; b_n \operatorname{sen}(nx) = f(x),$$

donde, pelos coeficientes da série de Fourier de senos de f obtida na alínea anterior se conclui que

$$a_1 - b_1 = \frac{2}{\pi}$$

e

$$\sqrt{n^2-2}\; b_n = \frac{2}{\pi n} \left[1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right],$$

para $n \geq 2$, pelo que se conclui finalmente que

$$a_1 = \frac{1}{\pi}, \qquad b_1 = -\frac{1}{\pi},$$

e

$$a_n = 0, \qquad b_n = \frac{2}{\pi n \sqrt{n^2-2}} \left[1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right],$$

para $n \geq 2$, e portanto a solução é finalmente dada por

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi} \operatorname{senh}(t) \operatorname{sen}(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{\pi n \sqrt{n^2-2}} \left[1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] \operatorname{sen}(\sqrt{n^2-2}\; t) \operatorname{sen}(nx).$$

[1,5 val] 2. Utilize um integral adequado no plano complexo para mostrar que, para qualquer inteiro fixo $n \geq 1$, se tem

$$\int_0^{\pi} (\operatorname{sen}(\theta))^{2n}\, d\theta = \frac{\pi (2n)!}{(2^n n!)^2}.$$

Resolução:

Começamos por observar que a função é par, pelo que

$$\int_0^{\pi} (\operatorname{sen}(\theta))^{2n}\, d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\operatorname{sen}(\theta))^{2n}\, d\theta.$$

Agora, como habitualmente para integrais de funções trigonométricas em intervalos de comprimento 2π, como é o caso, usamos a fórmula de Euler da definição da exponencial imaginária para escrever

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

e portanto

$$\int_0^{\pi} (\operatorname{sen}(\theta))^{2n}\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^{2n} d\theta,$$

tentando reconhecer nesta fórmula um integral complexo dado pela definição ao longo duma circunferência de raio um em torno da origem, parametrizada por $e^{i\theta}$. Para isso, multiplicamos e dividimos por $ie^{i\theta}$ para fazer surgir nesta fórmula a derivada da parametrização e "desparametrizando", de forma a escrevê-lo como um integral complexo em termos duma função de z obtemos

$$\int_0^{\pi} (\operatorname{sen}(\theta))^{2n}\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^{2n} \frac{ie^{i\theta}}{ie^{i\theta}} d\theta = \frac{1}{2i}\oint_{|z|=1} \left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\right)^{2n} \frac{1}{z}\, dz.$$

Este é o integral complexo, igual ao integral real da pergunta, que iremos agora calcular com a fórmula integral de Cauchy (ou pelo teorema dos resíduos). Reescrevemo-lo como

$$\frac{1}{2i}\oint_{|z|=1} \left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\right)^{2n} \frac{1}{z}\, dz = \frac{1}{(2i)^{2n+1}}\oint_{|z|=1} \frac{(z^2-1)^{2n}}{z^{2n+1}}\, dz,$$

e pelas fórmulas integrais de Cauchy para as derivadas (neste caso, para a derivada de ordem $2n$) concluímos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2i)^{2n+1}}\oint_{|z|=1} \frac{(z^2-1)^{2n}}{z^{2n+1}}\, dz &= \frac{2\pi i}{(2i)^{2n+1}(2n)!}\frac{d^{2n}}{dz^{2n}}(z^2-1)^{2n}_{|z=0} \\ &= \frac{\pi}{2^{2n}(-1)^n(2n)!}\frac{d^{2n}}{dz^{2n}}(z^2-1)^{2n}_{|z=0}. \end{aligned}$$

Resta-nos, portanto, calcular a derivada de ordem $2n$ na origem do polinómio de grau $4n$ dado por $(z^2-1)^{2n}$. É evidente que, neste polinómio, essa derivada de ordem $2n$ anulará todos os termos de grau inferior a $2n$, e os de grau superior a $2n$, ao serem avaliados em $z = 0$ também se anularão. Concluímos que o único termo que não dará zero será exactamente o da derivada de ordem $2n$ do termo de grau $2n$ do polinómio. Para identificá-lo a forma mais eficiente é usar o binómio de Newton

$$(z^2-1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (z^2)^k (-1)^{2n-k},$$

pelo qual observamos que o termo de grau $2n$ corresponde a $k = n$

$$\binom{2n}{n}(z^2)^n(-1)^{2n-n} = \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} z^{2n}(-1)^n,$$

o qual, derivado $2n$ vezes, dá

$$\frac{d^{2n}}{dz^{2n}}\frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} z^{2n}(-1)^n = \left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^2 (-1)^n,$$

e substituindo na fórmula integral de Cauchy

$$
\begin{aligned}
\int_0^\pi (\operatorname{sen}(\theta))^{2n}\, d\theta &= \frac{\pi}{2^{2n}(-1)^n(2n)!}\frac{d^{2n}}{dz^{2n}}(z^2-1)^{2n}_{|z=0} \\
&= \frac{\pi}{2^{2n}(-1)^n(2n)!}\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^2(-1)^n \\
&= \frac{\pi(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{\pi(2n)!}{(2^n n!)^2},
\end{aligned}
$$

como queríamos provar.

[2,0 val] 3. Prove o *princípio do argumento*: Seja f uma função holomorfa num conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ aberto e conexo, excepto num número finito de pólos $p_1, p_2, \ldots, p_m$ de ordens $O(p_j)$, $j = 1, \ldots, m$. Sejam também $z_1, z_2, \ldots, z_n$ um número finito de zeros de f, de ordens $O(z_k)$, $k = 1, \ldots, n$. Então, se γ é um caminho seccionalmente regular em Ω, homotópico a um ponto, que não passa sobre nenhum dos p_j ou z_k, prove que

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{k=1}^{n} O(z_k) I(\gamma, z_k) - \sum_{j=1}^{m} O(p_j) I(\gamma, p_j),$$

em que $I(\gamma, z_k)$ e $I(\gamma, p_j)$ designam, respetivamente, os índices do caminho γ relativamente aos pontos z_k e p_j.

Resolução:

Começamos por observar que, dadas as condições do enunciado, em Ω a função $f'(z)/f(z)$ tem sigularidades isoladas precisamente nos zeros e pólos de f. Assim, aplicando o teorema dos resíduos à função $\frac{f'}{f}$ temos

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{k=1}^{n} I(\gamma, z_k)\text{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_k\right) + \sum_{j=1}^{m} I(\gamma, p_j)\text{Res}\left(\frac{f'}{f}, p_j\right).$$

Para obter a conclusão da proposição, basta então provar que num zero z_k de f o resíduo de f'/f é igual a $O(z_k)$, e que num pólo p_j de f o resíduo de f'/f é igual a $-O(p_j)$.

Ora, se f tem um zero de ordem $O(z_k)$ em z_k, numa bola centrada nesse zero f é dada pela série de Taylor que, devido ao zero, começa precisamente no termo de potência $O(z_k)$

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{f^{(O(z_k))}(z_k)}{O(z_k)!}(z-z_k)^{O(z_k)} + \frac{f^{(O(z_k)+1)}(z_k)}{(O(z_k)+1)!}(z-z_k)^{O(z_k)+1} + \cdots \\
&= (z-z_k)^{O(z_k)}\left[\frac{f^{(O(z_k))}(z_k)}{O(z_k)!} + \frac{f^{(O(z_k)+1)}(z_k)}{(O(z_k)+1)!}(z-z_k) + \cdots\right] \\
&= (z-z_k)^{O(z_k)} g(z),
\end{aligned}
$$

em que g é holomorfa e $g(z_k) = \frac{f^{(O(z_k))}(z_k)}{O(z_k)!} \neq 0$. Portanto, nessa bola onde esse desenvolvimento em série de Taylor de f é válido temos

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{O(z_k)(z-z_k)^{O(z_k)-1}g(z) + (z-z_k)^{O(z_k)}g'(z)}{(z-z_k)^{O(z_k)}g(z)} = \frac{O(z_k)}{(z-z_k)} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

donde concluímos imediatamente que $\frac{f'(z)}{f(z)}$ tem por isso um pólo simples em z_k e que o resíduo é $O(z_k)$.

De forma inteiramente análoga, se f tem um pólo em p_j de ordem $O(p_j)$, numa coroa circular $0 < |z - p_j| < r$ de raio exterior r suficientemente pequeno, será válido o desenvolvimento em série de Laurent de f,

$$f(z) \quad = \quad \frac{b_{O(p_j)}}{(z-p_j)^{O(p_j)}} + \frac{b_{O(p_j)-1}}{(z-p_j)^{O(p_j)-1}} + \cdots$$

com $b_{O(p_j)} \neq 0$ donde, pondo o primeiro termo em evidência

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-p_j)^{O(p_j)}}\left[b_{O(p_j)} + b_{O(p_j)-1}(z-p_j) + \cdots\right] \\ &= \frac{1}{(z-p_j)^{O(p_j)}}h(z), \end{aligned}$$

em que h, com série de Taylor centrada em p_j dada por $h(z) = b_{O(p_j)} + b_{O(p_j)-1}(z-p_j) + \cdots$ é holomorfa na bola de raio r centrada em p_j (incluíndo no próprio ponto p_j) com $h(p_j) = b_{O(p_j)} \neq 0$. E portanto,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-\frac{O(p_j)}{(z-p_j)^{O(p_j)+1}}h(z) + \frac{h'(z)}{(z-p_j)^{O(p_j)}}}{\frac{h(z)}{(z-p_j)^{O(p_j)}}} = -\frac{O(p_j)}{(z-p_j)} + \frac{h'(z)}{h(z)},$$

concluindo-se aqui que os pólos p_j de f são também pólos simples de f'/f, com resíduo $-O(p_j)$.

Está assim demonstrada a proposição.